INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION

Association d'education
Organisme d'interêt general à caractere educatif
Etablissement libre d'enseignement superieur

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988 OPTION GENERALE

M A T H E M A T I Q U E S I

DUREE : 4 heures - COEFFICIENT : 5

Le sujet comporte un exercice de probabilités et un problème d'analyse indépendants que les candidats traiteront dans l'ordre de leur choix.

==========

EXERCICE

1°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(t) = 0$ si $t<0$ et
$f(t) = k\,e^{-kt}$ si $t\geq 0$, avec k strictement positif.

Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X absolument continue.

2°) Quelle est la fonction F de répartition de X ?

3°) Après en avoir justifié l'existence, calculer les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

4°) La durée T, en minutes, d'une communication téléphonique urbaine suit une loi de densité de probabilité f, c'est-à-dire que :

$$P(T\leq t) = F(t)$$

a) Calculer pour k = 0.8 la probabilité pour qu'une communication dure plus de quatre minutes.

b) Calculer pour k = 0.8 la probabilité pour qu'une communication dure entre 3 et 5 minutes.

c) Quelle valeur faut-il donner à k, pour que la probabilité qu'une communication soit supérieure à 3 minutes, soit égale à 1/10.

==========

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME

Le problème consiste à chercher les fontions numériques f, définies sur $]0, +\infty[$, et vérifiant la condition (C) :

$$(C) \quad \forall x > 0 \ , \quad f(x+1) = xf(x)$$

On notera :

E(x) la partie entière de x;
F l'ensemble des fonctions numériques, définies sur $]0,+\infty[$, vérifiant (C);
H l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $]0,+\infty[$.

Pour p entier strictement positif, l'on dira qu'une fonction est de classe C^p sur $]0, +\infty[$, si elle est p fois dérivable, avec une dérivée p-ième continue, sur cet intervalle. On admettra que le produit de deux fonctions de classe C^p est de classe C^p.

Les parties B, C, D, E du problème sont indépendantes entre elles. Les candidats pourront utiliser les résultats de la partie A même s'ils ne les ont pas établis.

PARTIE A

1°) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.

2°) Soit f une fonction de F.

On appelle θ la restriction de f à $]0, 1]$. On gardera cette notation dans toute la suite.

a) n étant un entier naturel non nul, calculer f(n) en fonction de θ(1) ?

b) Donner la valeur de f(x) pour tout $x > 0$ à l'aide de θ et $n = E(x)$.

On notera que f est entièrement déterminée par la condition (C) et par sa restriction θ à $]0, 1]$.

3°) On suppose $f \in F$ et f continue sur $]0, 2[$, montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

4°) On suppose $f \in F$ et f de classe C^p sur $]0, 2[$, montrer que f est de classe C^p sur $]0, +\infty[$.

PARTIE B - RECHERCHE DE FONCTIONS DE F, DONT LA RESTRICTION A $]0, 1]$ EST POLYNOME -

1°) On appelle f_1 la fonction de F, telle que sa restriction à $]0, 1]$ soit la fonction constante égale à 1.

Représenter graphiquement, avec une échelle de 2 cm, la fonction f_1 pour $0 < x \leq 4$

2°) Dans cette question on cherche les fonctions de f de F dont la restriction θ à $]0, 1]$ est donnée par :

$$\theta(x) = ax^2 + bx + c \ ; \quad a \neq 0$$

a) Montrer que l'on peut limiter l'étude au cas a = 1, condition que l'on supposera réalisée dans la suite de cette question.

b) A quelle condition, portant sur les coefficients b et c, f est-elle continue sur $]0, +\infty[$?

T. S. V. P.

c) Montrer que l'on peut trouver b et c de manière que la fonction f de F correspondante soit dérivable sur $]0, +\infty[$.
Soit f_2 la fonction ainsi trouvée.

d) Représenter graphiquement f_2 pour $0 < x \leqslant 2$ avec une échelle de 4 cm.

3°) Chercher s'il existe des fonctions f de F, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. telles que, la restriction θ de f à $]0, 1]$ soit un polynôme du troisième degré : $ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$.

4°) Peut-on "énoncer" une généralisation. (Justifier rapidement la réponse).

PARTIE C - RECHERCHE DE FONCTIONS DE F, DONT LA RESTRICTION A]0, 1] EST UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE -

Dans cette question l'on prendra θ définie sur $]0, 1]$ par :

$$\theta(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{avec } c \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0$$

1°)

a) Montrer que l'on peut choisir c = 1, sans changer la généralité du problème.

b) Montrer alors que l'on peut limiter la recherche des fonctions f de F aux deux cas : a = 1 d'une part
(a =0 et b =1) d'autre part.

c) A quelles conditions doit alors satisfaire d dans chacun des deux cas?

2°) Définir f sur $]0, 2]$.

3°) Dans le cas a = 1, existe-t-il des fonctions de F :

a) continues sur $]0, +\infty[$?

b) dérivables sur $]0, +\infty[$?

4°) Dans le cas a = 0, b=1, existe-t-il des fonctions de F :

a) continues sur $]0, +\infty[$?

b) dérivables sur $]0, +\infty[$?

PARTIE D - EXEMPLE D'UNE FONCTION DE CLASSE C^∞ VERIFIANT (C) -

1°) On pose pour $x>0$ $\quad W(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$

Montrer que l'intégrale est convergente.

2°) A l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, établir pour tout $x > 0$:

$$W(x+1) = xW(x)$$

REMARQUE

Ainsi la fonction W appartient à F. On peut établir - il n'est pas demandé aux candidats de le faire - que W est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivable, sur $]0, +\infty[$.

==========

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail